

Travaux dirigés MT11

PREMIÈRE PARTIE : ALGÈBRE
TD 1 à 7

Avant Propos

L'UV MT11 est une première rencontre avec les mathématiques telles qu'elles sont enseignées et pratiquées dans le supérieur. Bien que certains objets de ce cours aient déjà été abordés en classe de terminale, la présentation que nous en ferons sera souvent différente.

Le cours se décompose en deux parties, une partie algèbre et une partie analyse. Nous présentons ici la partie algèbre.

Différents objectifs sont visés dans cette partie et nous les listons par ordre croissant d'abstraction et de difficultés.

- Le premier objectif est de présenter des objets de bases que vous utiliserez dans votre vie d'étudiant à l'utbm et d'ingénieur : les complexes (chapitre 5), les matrices (chapitre 4), les polynômes (chapitre 6). Vous devez savoir calculer de manière élémentaire avec ces objets.
- Le deuxième objectif est de vous entraîner à produire des démonstrations rigoureuses. Pour cela nous insistons sur le « langage » et les raisonnements mathématiques dès le premier chapitre. Il vous sera demandé de produire des démonstrations au cours des TD et aux examens.
- Un troisième objectif est de faire une présentation cohérente de ces objets et non pas une présentation « utilitaire ». En ce sens nous introduirons des structures abstraites : groupes, anneaux, corps (chapitre 3), qui permettent de penser différents objets avec une même structure. En mathématique il arrive très souvent qu'un problème soit plus facilement résolu lorsqu'on adopte un degré d'abstraction suffisant. Nous pensons que cet aspect là de la discipline est très formateur pour des futurs scientifiques et nous présenterons des exemples simples.

Concrètement les notions travaillées (définitions, théorèmes) seront présentées pendant le cours. Une place non négligeable sera accordée aux démonstrations pour décoriquer devant vous les concepts mais aussi aux exemples pour développer votre intuition mathématique.

Le TD se décomposera en deux séances :

- Une première séance d'exercices où il vous sera demandé de mettre en pratique les résultats du cours.
- Une deuxième séance consacrée à la résolution de problèmes. On essaiera au cours de ces problèmes de mettre en place une démarche de recherche.

Évaluation

L'évaluation de l'UV se fera à partir de trois notes :

- La note de TD (30%).
- La note de médian (30%).
- La note d'examen final (40%).

La note de TD sera obtenue à partir des notes suivantes :

- Des tests hebdomadaires courts (moins de 15 minutes) à partir de la deuxième semaine de TD (pour s'entraîner aux tests hebdomadaires vous devez créer un compte sur la classe virtuelle que nous avons créée. Pour cela connectez-vous sur <http://wims.auto.u-psud.fr/wims/wims.cgi>, puis allez dans «zone élève» et rechercher la classe MT11. Ensuite inscrivez-vous).
- Deux devoirs maisons à faire par groupes de quatre.

Des ressources sont disponibles sur les sites suivants :

<http://pagesperso-orange.fr/utbmfh/>

<http://utbmbz.free.fr/>

Une page moodle reprenant toutes ces informations devrait voir le jour.

Pour finir, quelques références bibliographiques. Loin d'être exhaustive cette liste a pour principal but de vous inviter à aller voir dans d'autres ouvrages les chapitres présentés dans le cours :

- LIRET/MARTINAIS, Algèbre 1ère année, DUNOD.
- AZOULAY/AVIGNANT/AULIAC, Les mathématiques en licence, Tome 1 1ère année, EDISCIENCES.
- MONIER, Cours de mathématiques MPSI, PCSI, DUNOD [**dans la même collection on trouve des recueils d'exercices**]
- ARNAUDIES/FRAYSSE, Cours de Mathématiques, DUNOD [**ouvrage riche dont le contenu dépasse le cadre de l'UV MT11**]

TD 1 : Logique et ensembles

1 Exercices

Exercice 1. 1. Si P et Q sont deux propositions logiques, rappeler la négation et la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

2. Donner la négation et la contraposée de :
- a. Si tu ne valides pas l'U.V. MT11, tu ne partiras pas en vacances.
 - b. Si une fonction est dérivable, elle est continue.
 - c. Si un entier naturel est pair, il est divisible par 4.

Exercice 2. Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 ;$$

$$(c) \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 3. Soit f, g deux fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :

- | | |
|-------------------------|--|
| 1. f est majorée ; | 6. f n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts ; |
| 2. f est bornée ; | 7. f atteint toutes les valeurs de \mathbb{N} ; |
| 3. f est paire ; | 8. f est inférieure à g ; |
| 4. f est impaire ; | 9. f n'est pas inférieure à g . |
| 5. f est croissante ; | |

Exercice 4. Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. 1. Soit p_1, p_2, \dots, p_r r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \dots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i .

2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 6. A et B étant des parties d'un ensemble E , démontrer les lois de Morgan :

$$\complement A \cup \complement B = \complement(A \cap B) \quad \text{et} \quad \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B).$$

(vous ferez un dessin pour vous convaincre de ces égalités)

2 Pour réfléchir

Problème 1. Soit E un ensemble constitué de n éléments. On note C_n^k ou encore $\binom{n}{k}$ le nombre de sous-ensembles de E constitués de k éléments. Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés coefficients binomiaux, nous allons déterminer un certain nombre de propriétés les concernant. On notera $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ le sous-ensemble de E contenant les éléments x_1, \dots, x_k . On notera (x_1, x_2, \dots, x_k) la liste ordonnée définie par x_1, x_2, \dots, x_k choisis dans cet ordre. En particulier la liste (x_2, x_1, \dots, x_k) n'est pas identique à la liste (x_1, x_2, \dots, x_k) .

1. Expression de $\binom{n}{k}$:
 - a. Combien de listes (ordonnées) à k éléments distincts de E peut-on construire ?
 - b. Si $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est un sous-ensemble de E à k éléments, combien de listes peut-on écrire avec les éléments de A ?
 - c. En déduire que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Symétrie :
 - a. Montrer $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
 - b. Dessiner un ensemble à n éléments et un sous-ensemble à k éléments. Pourquoi existe-t-il autant de sous-ensemble à k éléments que de sous-ensembles à $n-k$ éléments ? Retrouver la formule de symétrie sans calculs.
3. Triangle de Pascal :
 - a. Montrer par le calcul que

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (\text{triangle de pascal})$$

- b. Retrouver sans calcul cette formule en appliquant le raisonnement suivant : on considère n étudiants et un professeur. On souhaite former un groupe de k personnes.
 - i. Combien de groupes de k personnes peut-on former ?
 - ii. Combien de groupes de k personnes sans l'enseignant peut-on former ?
 - iii. Combien de groupes de k personnes avec l'enseignant peut-on former ?
 - iv. Conclure.
4. Formule du binôme. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Problème 2. Dans ce problème vous allez démontrer de deux manières des résultats classiques sur les sommes d'entiers. Le premier résultat (somme des n premiers entiers) est à retenir (ou à savoir retrouver).

1. Montrer par récurrence :

$$\text{a. } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

$$\text{b. } \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

2. Dans les démonstrations ci-dessus, vous avez besoin de connaître le résultat pour mettre en place votre démonstration ! Nous allons démontrer à nouveau ces égalités sans faire appel aux résultats. Mais avant, une petite histoire : on raconte que Carl Friedrich Gauss, mathématicien allemand du XIX^{ème} siècle, impressionna à l'âge de 8 ans son instituteur en calculant en quelques secondes la somme des 100 premiers entiers. Voici ce qu'on pouvait lire sur son ardoise :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 101 & + & 101 & + & \dots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{1}{2}(101 \times 100) = 5050$$

- a. En reprenant la démonstration de Gauss retrouver la somme des n premiers entiers.
- b. Calculer de deux manières différentes $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^n (k+1)^3$. En déduire la somme des carrés des n premiers entiers.
3. Comment peut-on calculer $\sum_{k=0}^n k^3$?

3 Exercices corrigés

Exercice 7. 1. Démontrer que la proposition logique suivante est un théorème (c'est à dire est toujours vraie) :

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

En déduire la négation de la proposition suivante : "La fonction f est injective ou surjective".

2. Démontrer que la proposition logique suivante est un théorème

$$((\neg P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$$

À quel raisonnement correspond ce théorème ?

Exercice 8. Démontrer les relations suivantes :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 9. Soient E un ensemble, A, B et C des parties de E . Montrer que

$$(A \cap B \subset A \cap C) \wedge (A \cup B \subset A \cup C) \Rightarrow B \subset C$$

Exercice 10. On définit les cinq ensembles suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y < 1\} \\ A_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| < 1\} \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| + |y| < 1\} \\ A_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > -1\} \\ A_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| < 1\} \end{aligned}$$

1. Représenter ces cinq ensembles.
2. En déduire une démonstration géométrique de

$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$$

Exercice 11. 1. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1, 2\}))$.

2. Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 - a. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
 - b. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

TD 2 : Applications et relations

1 Exercices

Exercice 12. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$
3. $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y) \end{cases}$

Exercice 13. Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(\mathbb{R})$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $f(x) = e^{ix}$
2. $g^{-1}(] - 5, 0[\cup [4, 9])$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(x, y) = x^2 + y^2$.
3. $h^{-1}(]0, 1])$ où $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $h(x, y) = |x| + |y|$.

Exercice 14. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que $\forall A \subset E, A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que $(f \text{ est injective}) \iff (\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A)$.

Exercice 15. On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective.}$$

Montrer que :

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

Exercice 16. On définit la relation \sim sur \mathbb{Z} par $x \sim y \Leftrightarrow 5|(y^2 - x^2)$.

1. Montrer que \sim définit une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} .
2. Déterminer l'ensemble quotient \mathbb{Z}/\sim .
3. Peut-on définir une addition quotient ? Une multiplication quotient ?

2 Pour réfléchir

Problème 3. On dit qu'un ensemble E est (infini) dénombrable lorsqu'il existe une bijection de \mathbb{N} dans E . Intuitivement cela signifie qu'on peut numéroter les éléments de l'ensemble, $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \dots\}$. Dans ce problème nous allons montrer que \mathbb{Q} est dénombrable (et oui il y a autant de nombres rationnels que d'entiers naturels!).

1. Montrer qu'un sous-ensemble de \mathbb{N} est fini ou infini dénombrable.
2. Déterminer une bijection entre \mathbb{N} et les entiers naturels pairs. Entre \mathbb{N} et \mathbb{N}^* .
3. Montrer que l'application suivante est bijective.

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{cases}$$

4. On considère l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (p, q) & \mapsto & \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q \end{cases}$$

- a. Représenter $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et calculer les images de $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 0)$.
- b. Expliquer par un dessin clair comment est définie l'application g^{-1} (c'est donc une bijection!).
5. En déduire que \mathbb{Z}^2 et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont en bijection avec \mathbb{N} .
6. Montrer que \mathbb{Q} est dénombrable (on pourra montrer qu'il existe une injection de \mathbb{Q} dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et utiliser la question 1).

Problème 4. Soit \mathcal{R} la relation définie sur \mathbb{R}^2 par $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$.

1. Montrer que cette relation est une relation d'équivalence.
2. Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$ et de $(0, 1)$. Intuitivement à quel ensemble pouvez-vous identifier \mathbb{R}^2/\mathcal{R} ?
3. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & x + y \end{cases}$. L'application f est-elle injective? surjective?
4. Soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2/\mathcal{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \rightarrow & f(x, y) \end{cases}$$

Montrer que g est bien définie et bijective.

3 Exercices corrigés

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ $g(x) = f(x)$ est une bijection.
4. Retrouver ce résultat en étudiant les variations de f .

Exercice 18. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Montrer que $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Montrer que $(f \text{ est surjective}) \iff (\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B)$.

Exercice 19. [suite du problème 3] Dans cet exercice on prouve par «l'argument diagonal» que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

1. Soit $x \in]0, 1[$, on note x_i la i -ème décimale de x . On notera $x = \overline{0, x_1 x_2 x_3 \dots x_n \dots}$. On suppose qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{N} \rightarrow]0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $u_k = \phi(k)$. Soit a_n la n -ème décimale de u_n . On construit alors les entiers b_n tels que $b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } a_n \neq 1 \\ 2 & \text{si } a_n = 1 \end{cases}$. Quelle contradiction obtient-on avec le réel $\overline{0, b_1 b_2 \dots b_n \dots}$.
2. En déduire que \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Exercice 20. Soit E un ensemble, et $A \subset E$. On définit une relation sur $\mathcal{P}(E)$ par $X \sim Y \iff X \cup A = Y \cup A$.

1. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.
2. Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ X & \mapsto & X \setminus A \end{array}$. Montrer que ϕ est compatible avec \sim , et que l'application quotient $\bar{\phi}$ est une bijection.

TD 3 : Groupes, Anneaux et Corps

1 Exercices

Exercice 21. 1. Montrer que \mathbb{R} , muni de la loi $*$ définie par $x * y = x + y - 1$ est un groupe.

2. Montrer que $H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, +)$ et que $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 2\}$ n'est pas un sous-groupe de \mathbb{R}^2 .

3. Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^*

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi \circ .

Exercice 22. 1. Rappeler la définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Comment sont définies les opérations d'addition et de multiplication sur cet anneau ?

2. a. Écrire la loi du groupe $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{+})$.

b. Écrire la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{\times})$.

c. $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \bar{+}, \bar{\times})$ est-il un corps ?

3. Mêmes questions avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$. (Pour un produit d'anneau $A \times B$ l'addition et la multiplication peuvent être définies de la manière suivante $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$).

Exercice 23. [d'après médian 2007] Soit $G = \{e, \alpha, \beta\}$ un groupe quelconque à trois éléments pour une loi $*$.

1. Recopier la table suivante

$*$	e	α	β
e			
α			
β			

 et compléter la première ligne et première

colonne (e représente l'élément neutre pour $*$). Peut-on avoir $\alpha^2 = e$ (rappel $\alpha^2 = \alpha * \alpha$) ?

2. Combien de tables différentes peut-on obtenir pour les groupes à trois éléments ?

Exercice 24. Montrer que si $3 \mid x^2 + y^2$ alors $3 \mid x$ et $3 \mid y$ (indication : on peut raisonner dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$).

En déduire que $x^2 + y^2 = 750000000$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Z} .

2 Pour réfléchir

Problème 5. [Le jeu du taquin]

Introduction, définitions, notations

Le but de ce problème est de présenter un groupe célèbre en mathématique : le groupe symétrique ou groupe des permutations.

Définition 1. L'ensemble \mathcal{S}_n est l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Un élément σ de \mathcal{S}_n est appelé une permutation. Dans un premier temps on notera une permutation σ sous la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Cette notation signifie que $\sigma(1) = a_1, \sigma(2) = a_2, \dots$, avec $a_i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall i \neq j, a_i \neq a_j$.

Exemple 1. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ correspond à l'application identité de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$.

On définit le produit de deux permutations comme la composition des applications :

Soient $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, alors

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma_1(\sigma_2(1)) & \sigma_1(\sigma_2(2)) & \sigma_1(\sigma_2(3)) & \dots & \sigma_1(\sigma_2(n)) \end{pmatrix}$$

Dans la première partie du problème on étudie (\mathcal{S}_3, \circ) et on montre que c'est un groupe.

1. Le groupe \mathcal{S}_3

- Déterminer explicitement les permutations de \mathcal{S}_3 .
- Écrire la «table de multiplication» de \mathcal{S}_3 pour la loi \circ .
- En déduire que \mathcal{S}_3 est un groupe non commutatif.

2. Quelques calculs dans \mathcal{S}_5 et \mathcal{S}_6 . Dans cette seconde partie on étudie quelques exemples de permutations dans \mathcal{S}_5 . Il faut pour cela introduire la notion de cycle :

Définition 2. Un cycle est une permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ telle

qu'il existe un entier i vérifiant $i \xrightarrow{\sigma} a_i = \sigma(i) \xrightarrow{\sigma} \sigma(a_i) = \sigma(\sigma(i)) \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} \sigma(\sigma(\dots(\sigma(i))\dots)) = i$ et telle que pour tout $j \notin \{i, \sigma(i) = a_i, \sigma(\sigma(i)) = \sigma(a_i), \dots\}$ on ait $\sigma(j) = j$.

Un tel cycle se notera $(i \ \sigma(i) \ \sigma(\sigma(i)) \ \dots \ \sigma(\sigma(\dots\sigma(i))))$

Exemple 2. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est un cycle que l'on notera $\sigma = (1 \ 3 \ 2 \ 5)$ (et il faut comprendre que l'image de 1 est 3, l'image de 3 est 2, l'image de 2 est 5, et l'image de 5 est 1. La valeur 4 n'apparaissant pas dans le cycle, cela signifie que l'image de 4 est 4).

On peut décomposer une permutation quelconque en produit de cycles comme dans l'exemple qui suit :

Exemple 3. La permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ fait apparaître deux cycles (dis-joints) $(1 \ 2)$ et $(3 \ 4 \ 5)$. On vérifie que l'on peut décomposer σ en produit de deux cycles : $\sigma = (1 \ 2) \circ (3 \ 4 \ 5)$.

Définition 3. Un cycle qui échange seulement deux éléments est appelé une transposition. On notera $\tau = (a_i \ a_j)$, la transposition définie par $\tau(a_i) = a_j$, $\tau(a_j) = a_i$ et qui laisse fixe les autres éléments.

- a. Écrire la décomposition de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de cycles (voir exemple 3).
 - b. À quelle permutation correspond le produit suivant de transpositions : $(1 \ 2)(2 \ 3)(1 \ 3)(4 \ 5)$?
 - c. Écrire la décomposition en produit de transpositions de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (on décomposera d'abord en cycles, puis on écrira chaque cycle comme produit de transpositions).
 - d. Comparer $\sigma_1 = (1 \ 2)(2 \ 3)(3 \ 4)(5 \ 6)$ et $\sigma_2 = (1 \ 4)(1 \ 3)(1 \ 2)(1 \ 5)(1 \ 6)(1 \ 5)$.
3. Les choses sérieuses : \mathcal{S}_n .

On travaille maintenant dans le groupe (\mathcal{S}_n, \circ) . On appelle support d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ l'ensemble des $i \in \{1, \dots, n\}$ tels que $\sigma(i) \neq i$. On notera supp_σ le support de σ (ce sont donc les points « bougés » par σ).

- a. Montrer que si $i \in \text{supp}_\sigma$ alors $\sigma(i) \in \text{supp}_\sigma$.
- b. Soit σ_1 et σ_2 deux permutations à supports disjoints. Montrer que $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$ c'est à dire montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma_1 \circ \sigma_2(i) = \sigma_2 \circ \sigma_1(i)$ (on pourra étudier les différents cas si i est dans le support de σ_1 ou de σ_2 ou aucun des deux).
- c. Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ On considère les images de $a_0 = 1$, $a_1 = \sigma(1)$, $a_2 = \sigma(\sigma(1))$, \dots , $a_k = \underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{k \text{ fois}}(1)$.
 - i. Expliquer pourquoi il existe $k \leq n$ pour la suite ainsi construite tel que $\sigma(a_k) = 1$ (on pourra raisonner par l'absurde).

- ii. En déduire que $\sigma = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k) \circ \sigma_2$ où σ_2 est une permutation dont le support est disjoint du support du cycle $(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k)$.
- iii. Conclure qu'une permutation peut toujours se décomposer en cycles disjoints.
- d. Montrer que $(a_0 \ a_1 \ \dots \ a_k) = (a_0 \ a_1) \circ (a_1 \ a_2) \circ \dots \circ (a_{k-2} \ a_{k-1}) \circ (a_{k-1} \ a_k)$.
- e. Conclure qu'une permutation peut toujours se décomposer en produit de transpositions.

Théorème-Définition 1. Soit σ une permutation. On décompose σ en produit de k transpositions $(a_1 \ a_2) (a_i \ a_j) \dots$. On appelle signature de σ l'entier $\varepsilon(\sigma)$, défini par $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$.

Remarque. On a vu qu'on peut toujours décomposer une permutation en produit de transposition (partie 3 question 5). Mais cette décomposition n'est pas unique (partie 2 question 4). Par contre le résultat précédent affirme qu'une permutation ne peut pas s'écrire à la fois comme produit d'un nombre pair de transpositions (signature égale à 1) et à la fois comme un produit d'un nombre impair de transpositions (signature -1).

4. Le jeu du Taquin.

Le jeu du taquin est un carré de 16 cases. Une des cases est vide ce qui permet le mouvement des autres cases. Une case non vide pouvant glisser dans la case vide et prendre sa place :

1	2	3	4	→	1	2	3	4
5	6	7	8		5	6	7	8
9	10	11	12		9	10	11	12
13	14	15			13	14		15

En 1870 le problémiste Sam Loyd offrit une récompense de 1000\$ à la personne qui proposerait une solution pour passer de la position :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

à la position

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Étudions ce problème mathématiquement. En appelant 16 la case vide on identifie une position du Taquin à une permutation. Ainsi la position

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	

s'identifiera à la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 14 & 15 & 16 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{14} & a_{15} & 16 \end{pmatrix}$

la position initiale

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

s'identifiera à la permutation identité.

- À quel type de permutation correspond un mouvement élémentaire au jeu du Taquin ?
- Montrer qu'il faut un nombre pair de mouvements élémentaires pour ramener la case 16 (vide) en bas à droite.

- Quelle est la signature de la permutation correspondant à

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

- Sam Loyd risquait-il de perdre 1000\$?
- La position suivante peut-elle s'obtenir à partir de la position initiale ?

3	1	2	4
6	7	5	10
9	8	11	12
14	15	13	

3 Exercices corrigés

Exercice 25. Soit (G, \perp) un groupe. On suppose que pour tout $x \in G$, on a $x \perp x = e$.

1. Montrer que $\forall x \in G, x^{-1} = x$.
2. Montrer que G est commutatif.

Exercice 26. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de solution $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour l'équation $x^2 - 2y^6 = 17$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que s'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 - 2y^6 = 17$ alors l'égalité $\bar{x}^2 + (n-2)\bar{y}^6 = \bar{17}$ est vraie dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. En calculant \bar{x}^2 et \bar{y}^6 pour chaque valeur de \bar{x}, \bar{y} dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, montrer que $\bar{x}^2 + 5\bar{y}^6 = \bar{17}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
3. En déduire que $x^2 - 2y^6 = 17$ n'a pas de solution entière.

Exercice 27. En écrivant la table de multiplication de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ montrer que $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ est un corps.

TD 4 : Matrices

1 Exercices

Exercice 28. Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 29. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3 . En déduire B^n , pour tout entier n .
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n Pour tout entier n .

Exercice 30. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $B = C$? Que peut-on en conclure sur A ?

Exercice 31. Calculer l'inverse s'il existe de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Pour réfléchir

Problème 6. [L'algorithme de Strassen] Le but de ce problème est de présenter l'algorithme de Strassen sur le produit des matrices. La multiplication de deux matrices A et B , telle que vous l'avez vu en cours, est une opération «coûteuse» en temps de calcul. En particulier elle nécessite beaucoup de multiplications entre les éléments des lignes de la matrice A et des colonnes de la matrice B . Si on souhaite optimiser ce calcul pour une implémentation informatique on cherchera à diminuer le nombre de multiplications (la multiplication nécessitant plus de temps de calcul que l'addition pour un ordinateur). En 1969 dans l'article *Gauss elimination is not optimal*¹ Strassen a démontré que l'on pouvait effectuer le produit de deux matrices en effectuant moins de multiplications que par l'expression du produit de matrices vu en cours.

1. Algorithme naïf (celui vu en cours) : on considère deux matrices carrées de taille n , A et B à coefficients réels. En effectuant le produit de deux matrices vu en cours, combien de multiplications doit-on réaliser ?
2. L'algorithme de Strassen :
 - a. On considère la multiplication de deux matrices de taille 2,

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C$$

- i. Considérons les produits suivants :

$$\text{(Formules de Strassen)} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = (a_{11} - a_{12})b_{22} \\ q_2 = (a_{21} - a_{22})b_{11} \\ q_3 = a_{22}(b_{11} + b_{21}) \\ q_4 = a_{11}(b_{12} + b_{22}) \\ q_5 = (a_{11} + a_{22})(b_{22} - b_{11}) \\ q_6 = (a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\ q_7 = (a_{12} + a_{22})(b_{21} + b_{22}) \end{array} \right.$$

Vérifier les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} c_{11} &= q_1 - q_3 - q_5 + q_7 \\ c_{12} &= q_4 - q_1 \\ c_{21} &= q_2 + q_3 \\ c_{22} &= -q_2 - q_4 + q_5 + q_6 \end{aligned}$$

- ii. Conclure que les formules de Strassen permettent de calculer le produit $A \times B$ en effectuant 7 multiplication au lieu de 8.

- b. Cas général :

¹article disponible sur <http://scgroup.hpclab.ceid.upatras.gr/class/SC/Papers/Strassen.pdf>

- i. Soient A et B deux matrices de taille n (on supposera $n = 2^k$ quitte à rajouter des lignes et des colonnes de 0). On découpe ces matrices en blocs (les sous-matrices sont de taille 2^{k-1}) :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \text{ et } B = \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right)$$

et on note $C = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array} \right)$ le produit $A \times B$. Exprimer les blocs C_{ij} en fonction des blocs A_{ij} et B_{ij} (en utilisant la multiplication naïve).

- ii. Montrer que les formules de Strassen s'adaptent à l'écriture par blocs.
- iii. Notons $T(n)$ le nombre de multiplications nécessaires pour multiplier deux matrices de taille n . Montrer, en appliquant les formules de Strassen par blocs, que l'on a $T(n) = 7T(\frac{n}{2})$.
- iv. En déduire que le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $A \times B$ est $T(n) = n^{\frac{\ln(7)}{\ln(2)}} \simeq n^{2.81}$ (on calculera $T(n)$ en fonction de k puis on cherchera α tel que $T(n) = n^\alpha$).

3 Exercices corrigés

Exercice 32. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les produits suivants : PP' , D^2 , D^3 et PDP' .
2. Dédire de la question précédente un moyen simple de calculer A^2 et A^3 .

Exercice 33. Soit A une matrice carrée d'ordre n ; on suppose que A^2 est une combinaison linéaire de A et I_n : $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

1. Montrer que A^n est également une combinaison linéaire de A et I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que si β est non nul, alors A est inversible et que A^{-1} est encore combinaison linéaire de A et I_n .
3. Application 1 : soit $A = J_n - I_n$, où J_n est la matrice Attila (envahie par les uns...), avec $n \geq 1$. Montrer que $A^2 = (n-2)A + (n-1)I_n$; en déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.
4. Application 2 : montrer que si $n = 2$, A^2 est toujours une combinaison linéaire de A et I_2 . Déterminer alors à quelle condition sur les coefficients de A , A^{-1} existe et trouver la formule donnant A^{-1} en utilisant 2.

Exercice 34. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit $\det A = ad - bc$. Montrer que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

TD 5 : Les Complexes

1 Exercices

Exercice 35. Simplifier $(1+i).(1-2i)$, $(1+i\sqrt{3})^3$, $\frac{1-i}{3+2i} + 2\frac{1+3i}{2-3i}$.

Exercice 36. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 37. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser :

1. $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$
2. $\cos^3 x + 2 \cos^2 x + \cos x$
3. [corrigé] $\sin^3 x + 2 \sin^2 x + \sin x$
4. [corrigé] $\sin^2(3x) + \cos^2(2x)$

Exercice 38. Déterminer les racines

- i. carrées de $11 + 4i\sqrt{3}$,
- ii. sixièmes de -27 ,
- iii. cubiques de $4(1 + i\sqrt{3})$.

Exercice 39. Soit z un nombre complexe non nul. Posons $a = z + 1/z$.

1. Montrer que $z^2(a^2 + a - 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.
2. Montrer que $a^2 + a - 1 = 0$ si et seulement si $z \neq 1$ et $z^5 = 1$.
3. En déduire que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5} - 1)/4$.
4. Calculer $\cos(\pi/5)$ et $\cos(\pi/10)$.

Exercice 40. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 = 0 & \quad ; \quad z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0 & \quad ; \\ z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 & \quad ; \quad z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0 \end{aligned}$$

Exercice 41. Résoudre dans \mathbb{C} le système :

$$\begin{cases} |z - 1| \leq 1 \\ |z + 1| \leq 1 \end{cases} .$$

(indication : interpréter géométriquement $|z_1 - z_2|$)

2 Pour réfléchir

Les deux problèmes suivants ont pour but de démontrer que le seul polygone régulier dont les sommets ont des coordonnées rationnelles est le carré.

Dans ce qui suit on considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.

Définition 4. Un polygone régulier de centre Ω est un polygone inscrit dans un cercle de centre Ω et dont les côtés sont de même longueur. Les sommets $(M_k)_{1 \leq k \leq n}$ vérifient $(\overrightarrow{\Omega M_k}, \overrightarrow{\Omega M_{k+1}}) = \frac{2\pi}{n}$.

Ainsi dans ce qui suit on veut déterminer les polygones réguliers tels que pour tout k , les coordonnées (x_k, y_k) de M_k sont rationnelles.

Problème 7. [cas $n=3,4,5,6$]

1. Pour démarrer :
 - a. Esquisser les polygones réguliers (dans leur cercle de centre Ω) pour $n = 3, 4, 5, 6$.
 - b. Montrer que le carré répond à la question posée.
2. Structure d'anneau et de corps : Soit E l'ensemble des nombres complexes $z = a+ib$ tels que a et b soient des entiers, et F l'ensemble des complexes tels que a et b soient rationnels. On muni E et F de l'addition et de la multiplication dans \mathbb{C} . Montrer (brièvement) que E est un anneau et F est un corps.
3. Soit E_n l'ensemble des complexes non nuls z ayant toutes leurs racines $n^{\text{ième}}$ dans E et F_n l'ensemble des complexes non nuls ayant leurs racines $n^{\text{ième}}$ dans F :

$$z \in E_n \Leftrightarrow (z \neq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{C}, x^n = z \Rightarrow x \in E)$$

- a. Montrer que $E_n \neq \emptyset \Rightarrow F_n \neq \emptyset$.
- b. Soit $z \in F_n$ et soient (z_k) les racines $n^{\text{ième}}$ de z . Montrer l'existence d'un entier d tel que pour tout k , $dz_k \in E$. Conclure que $F_n \neq \emptyset \Rightarrow E_n \neq \emptyset$.
- c. Montrer que $F_n \neq \emptyset \Leftrightarrow e^{2i\pi/n} \in F$.
- d. Montrer que F_n est vide pour $n = 3, 5, 6$ (pour $n = 5$ vous pouvez utiliser le résultat de l'exercice [39](#)).
4. Soit ω l'affixe de Ω et a l'affixe de $\overrightarrow{\Omega A_1}$. Déterminer en fonction de ω , a et $e^{2ik\pi/n}$ l'affixe de A_k . En déduire que Ω est l'isobarycentre des sommets du polygone.
5. On suppose que le polygone (A_k) satisfait aux exigences du problème (i.e. les coordonnées des points (A_k) sont rationnelles), montrer que ω , a et $ae^{2i\pi/n}$ sont dans F . En déduire que s'il existe un polygone régulier ayant tous ses sommets à coordonnées rationnelles, alors $F_n \neq \emptyset$.
6. Existe-t-il de tels polygones pour $n = 3, 4, 5, 6$?

Problème 8. [suite du problème précédent] On suppose $n > 6$. On veut montrer par l'absurde que $E_n = \emptyset$. Soient $a \in E_n$ et a_0 une racine $n^{\text{ième}}$ de a . On note $a_k = a_0 e^{2ik\pi/n}$ et A_k le point d'affixe a_k . Soit $b_k = a_{k-1} + a_{k+1} - a_k$.

1. Montrer (à l'aide d'un dessin) que $n > 6$ implique $b_k \neq 0$. Montrer que $b_k \in E$.
2. Montrer que $b_k = 2(\cos(\frac{2\pi}{n}) - 1)a_k$. Notons $b = b_k^n$. Montrer que $b \in E_n$.
3. Montrer que $|b| < |a|$.
4. En itérant la construction, aboutir à une contradiction.
5. Conclure que $E_n = \emptyset$ pour $n > 6$.

3 Exercices corrigés

Exercice 42. 1. a. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b. Mettre $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme exponentielle.

c. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 43. Montrer que les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 44 (Médian Printemps 2007). Dans cet exercice on définit une relation binaire sur \mathbb{C} . Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes alors on dira que :

$$z_1 \preceq z_2 \text{ si et seulement si } a_1 < a_2 \text{ ou } (a_1 = a_2 \text{ et } b_1 \leq b_2).$$

Par exemple on a $2 + 5i \preceq 3 + i$ (car $2 < 3$) et $2 + i \preceq 2 + 5i$ (car $2 = 2$ et $3 \leq 5$). Par contre $3 + 7i \not\preceq 2 + 8i$.

1. Montrer que \preceq définit une relation d'ordre sur \mathbb{C} .
2. Cette relation est-elle d'ordre total? Justifier.
3. Montrer que \preceq est compatible avec l'addition, c'est à dire pour tout $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ on a

$$z_1 \preceq z_2 \Rightarrow z_1 + z_3 \preceq z_2 + z_3.$$

4. Montrer que $0 \preceq i$, en déduire que \preceq n'est pas compatible avec la multiplication.

TD 6 : Polynômes

1 Exercices

Exercice 45. Effectuer les divisions euclidiennes de

$$3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3,$$

$$3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2.$$

Exercice 46. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, et $\alpha = P(a)$, $\beta = P(b)$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?
2. Trouver les restes des divisions euclidiennes de :

$$\text{a. } X^{50} \text{ par } X^2 - 3X + 2 \quad \text{b. } (X + \sqrt{3})^{17} \text{ par } X^2 + 1 \quad \text{c. } X^8 - 32X^2 + 48 \text{ par } (X - \sqrt{2})^3.$$

Exercice 47. Effectuer les divisions par puissances croissantes de :

1. $P = 1$ par $Q = 1 - X$, à l'ordre n ,
2. $P = 1 + X$ par $Q = 1 + X^2$ à l'ordre 5.

Exercice 48. Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$A = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } B = X^4 + 2X^3 + X + 2,$$

$$A = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 \text{ et } B = X^3 + X^2 - X - 1,$$

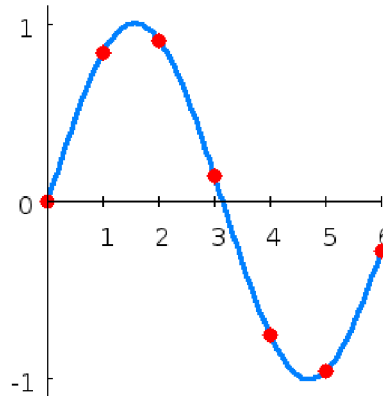
Exercice 49. Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $X^3 - 3$.
2. $X^6 + 1$.
3. $X^{12} - 1$.
4. $X^9 + X^6 + X^3 + 1$.

Exercice 50. Trouver $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^5 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 1$.

2 Pour réfléchir

Problème 9. [Polynôme d'interpolation] Dans le problème suivant, on se donne une fonction f définie d'un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} , et $n+1$ points distincts x_0, x_1, \dots, x_n de I . On suppose que l'on connaît la valeur de f aux points x_i , et on s'intéresse aux polynômes qui vont prendre les mêmes valeurs que f en chacun de ces $n+1$ points. On dit qu'un tel polynôme interpole f aux points donnés (on parle aussi de polynôme interpolateur).



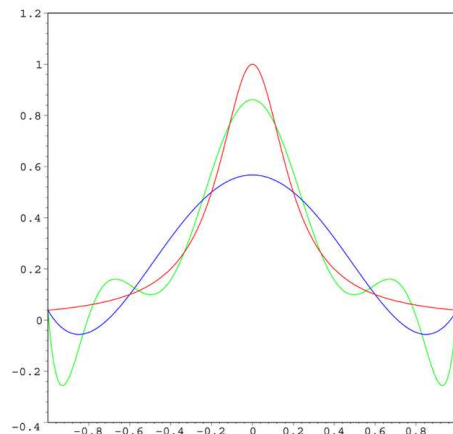
Les points correspondent aux points d'interpolation $(x_k, f(x_k))$, la courbe représente le polynôme d'interpolation.

1. Dans cette question, nous allons montrer qu'il y a au plus un polynôme interpolateur de degré n .
 - a. Soit P un polynôme ayant une racine x_0 . Montrer que $(X - x_0)$ divise P .
 - b. Montrer qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines.
 - c. Soient P et Q deux polynômes de degré n ayant $n+1$ racines distinctes en commun. Montrer que $P = Q$. Expliquer pourquoi ce résultat permet de répondre à la question posée.
2. Méthode de résolution directe : dans cette question, nous allons essayer de calculer directement les coefficients du polynôme interpolateur. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ (les a_i sont les inconnues à calculer).
 - a. Écrire les équations $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$ sous forme de système linéaire.
 - b. Montrer que ce système linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

- c. Dans cette question, prenons $n = 2$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ est inversible, et calculer son inverse.
- d. Pouvez-vous facilement montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$ est inversible (les matrices de ce type sont appelées matrices de Vandermonde) ?
3. Construction du polynôme interpolateur : l'idée de Lagrange a été de construire des polynômes L_k vérifiant $L_k(x_i) = 0$ si $i \neq k$, et $L_k(x_k) = 1$.
- a. Dans cette question, prenons $n = 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $x_2 = 2$. Trouver les polynômes L_0, L_1, L_2 de degré 2 qui vérifient $L_0(0) = 1, L_0(1) = 0, L_0(2) = 0$; $L_1(0) = 0, L_1(1) = 1, L_1(2) = 0$; $L_2(0) = 0, L_2(1) = 0, L_2(2) = 1$.
- b. Donner l'expression formelle des polynômes L_k (en fonction de x_0, x_1, \dots, x_n).
- c. Expliquer pourquoi $P(X) = f(x_0)L_0(X) + \dots + f(x_n)L_n(X)$ est le polynôme interpolateur de degré n de f aux points x_0, x_1, \dots, x_n .
4. Phénomène de Runge : on pourrait penser naïvement que plus on augmente le nombre de points d'interpolation, meilleure est l'approximation obtenue. Nous allons montrer sur un exemple numérique que ce n'est pas forcément le cas.

Soit la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$. À l'aide d'une calculatrice ou de votre PC, tracer sur un même graphique les représentations de f et de L_{10} (le polynôme interpolant f aux points régulièrement espacés $x_i = -1 + i \times 0,2$) : on observe alors un phénomène de divergence qui augmente si on augmente le nombre de points d'interpolation !



3 Exercices corrigés

Exercice 51. Soient P et Q deux polynômes. Montrer que a est une racine commune à P et Q si et seulement si a est une racine de $PGCD(P, Q)$. En déduire les racines multiples de $X^5 - X^3 - 4X^2 - 3X - 2$.

Exercice 52. Factoriser le polynôme $P(X) = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{X(X-1)\dots(X-n)}{(n+1)!}$

Exercice 53. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, trouver le reste de la division euclidienne du polynôme $P = (X \sin \theta + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

Exercice 54. Trouver un polynôme P de degré 5, tel que $P(X) + 1$ soit divisible par $(X - 1)^3$ et $P(X) - 1$ soit divisible par $(X + 1)^3$.

TD 7 : Fractions rationnelles

1 Exercices

Exercice 55. Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

1. $\frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

2. $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x+4)}$

3. $\frac{x^2}{x^4-1}$

4. $\frac{n!}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}$

Exercice 56. Décomposer sur \mathbb{R} et \mathbb{C} les fractions rationnelles

1. $\frac{1}{(x+1)(x+2)^6}$

2. $\frac{1}{x^4-x}$

Exercice 57. Calculer $\int \frac{x^2-7x+6}{x^3-3x^2-9x+27} dx$ (d'après examen final MT11 automne 2004).

Exercice 58. Calculer pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Exercice 59. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

2 Pour réfléchir

Problème 10. Soit $F(X) = \frac{1}{(X-a)^2 Q(X)}$ (où $Q(a) \neq 0$). La décomposition en éléments simples de $F(X)$ permet d'écrire :

$$F(X) = G(X) + \frac{\lambda}{X-a} + \frac{\mu}{(X-a)^2}. \quad (*)$$

1. Donner l'expression de λ en fonction de Q .
2. Multiplier la relation (*) par $(X-a)^2$, dériver le résultat, et l'évaluer en $X = a$ pour donner l'expression de μ en fonction de Q et Q' .

Problème 11 (D'après Médian 2007).

Soit

$$P(X) = (X-x_1)^{\lambda_1} (X-x_2)^{\lambda_2} \cdots (X-x_n)^{\lambda_n} \in \mathbb{C}[X].$$

1. Calculer $\ln(|P|)$.
2. En dérivant l'expression précédente, montrer que la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ est :

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{\lambda_1}{X-x_1} + \frac{\lambda_2}{X-x_2} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X-x_n}.$$

3. Soit α une racine de P' . Montrer que $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{|z-x_i|^2} \right) \alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{x_i}{|\alpha-x_i|^2}$, et en déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

3 Exercices corrigés

Exercice 60. Décomposition en éléments simples de $\Phi = \frac{2x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 1}{2x^3 - x^2}$.

Exercice 61. Décomposition en éléments simples de $\Phi = \frac{2x^5 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1}{x^3(x-1)^2}$.

Exercice 62. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\omega X) = P(X)$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.
2. En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$